COMMENT UNE ADDITION PEUT-ELLE DEVENIR UNE SOUSTRACTION ? LE ROLE DU SCHEMA EN BARRES DANS UNE LEÇON DE MATHEMATIQUES JAPONAISE

Stéphane Clivaz et Masanobu Sakamoto, Shirley Tan

HEP Vaud, Lausanne, Suisse et Université de Nagoya, Japon

Mots-clés : schéma en barres, résolution de problèmes, Japon, analyse de leçon basée sur des transcriptions

Cet article décrit une leçon de mathématiques japonaise consacrée à la résolution d'un problème additif. L'analyse de la leçon est contrastée avec une analyse *a priori* se focalisant sur la représentation du problème sous forme de schéma en barres. Cette analyse permet de dégager les représentations du problème et leur utilisation par les élèves et l'enseignant et d'envisager quelques perspectives pour les enseignant·e·s francophones.

INTRODUCTION

Cet article décrit et analyse une leçon de mathématiques japonaise consacrée à la résolution d'un problème additif. L'analyse de cette leçon a été effectuée à l'université de Nagoya par trois chercheurs d'origines diverses, portant des regards différents sur une même leçon. Le croisement des trois regards donne à chacune des trois analyses un nouveau relief. C'est en particulier le cas de cet article qui se focalise sur les aspects de didactique des mathématiques tout en étant influencé par la méthodologie d'analyse de leçon basée sur des transcriptions (Transcript Based Lesson Analysis, TBLA, Matoba, 2017), développée à l'université de Nagoya. Cette méthodologie est une extension du cycle japonais de lesson study (Clivaz, 2015). Elle est réalisée par des chercheurs universitaires et consiste en une analyse collaborative détaillée de la transcription d'une leçon, pouvant parfois enrichir une seconde discussion post-leçon ultérieure avec les enseignants ou pouvant amener des résultats complémentaires à cette discussion. Ces résultats sont ensuite utilisés dans les cycles suivants et peuvent être publiés comme articles de recherche.

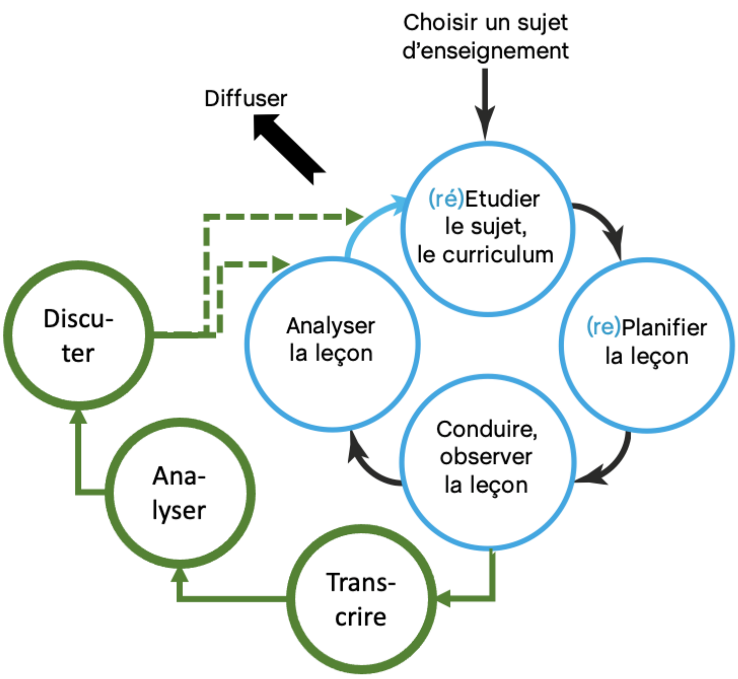


Fig. 1 : Le cycle lesson study réalisé par les enseignants (en bleu) et le cycle TBLA réalisé par les chercheurs (en vert)

Comme c'est le cas ici, cette méthodologie est aussi parfois utilisée pour analyser des leçons ordinaires. Le résultat des analyses peut alors être communiqué à l'enseignant·e ayant réalisé la leçon et à ses collègues.

Dans une première partie, nous décrirons brièvement les circonstances de la leçon, les données recueillies et leur analyse. La deuxième partie proposera une analyse *a priori* du problème au centre de la leçon, en se focalisant sur la représentation de ce problème sous forme de schéma en barres. La leçon effectivement réalisée sera analysée *a posteriori* dans une troisième partie, en comparaison avec l'analyse *a priori*. En conclusion, nous discuterons les perspectives ouvertes par cette analyse, tant pour les enseignant·e·s francophones que pour les enseignant·e·s japonais·e·s.

UNE LEÇON JAPONAISE (PRESQUE) ORDINAIRE

Les leçons de mathématiques dans les écoles primaires japonaises sont impressionnantes pour un observateur occidental. Réunissant jusqu'à 40 élèves, elles sont centrées sur la résolution d'un problème et elles ont fait l'objet de nombreuses analyses en français ou en anglais (voir par exemple Batteau, 2019; Clivaz et Miyakawa, 2020). Les chercheurs de l'équipe de « méthodes d'éducation » de l'université de Nagoya ont fait le choix d'effectuer une visite annuelle dans une petite école rurale située dans les montagnes de la préfecture d'Aichi et d'en analyser plusieurs leçons, notamment pour profiter du fait que ces leçons réunissent souvent un très petit nombre d'élèves, ce qui n'est pas considéré comme une limite à la recherche mais comme une condition particulière permettant une analyse plus détaillée. La leçon décrite ici fait partie de ce corpus de leçon. C'est une leçon ordinaire de grade 2[1], n'ayant bénéficié d'aucune préparation particulière, donnée par un enseignant généraliste ayant environ vingt ans d'expérience, Eisaku[2], à quatre élèves : deux filles, Ayako et Hikari et deux garçons, Chihiro et Daiki.

Le problème au centre de la leçon était le suivant[3] :

> Au début, il y avait 24 enfants qui jouaient.
>
> Puis leurs amis sont venus.
>
> Il y a maintenant 35 enfants en tout.
>
> Combien de personnes sont venues ?

La leçon, d'une durée de 53 minutes, a été filmée par deux caméras fixes (une en fond de classe, face au tableau noir, une sur le côté filmant les élèves de trois quarts face). La leçon a été intégralement transcrite en japonais et la transcription a été traduite en anglais. Le deuxième et le troisième auteur de cet article ont réalisé l'analyse de la leçon sur la base de la transcription japonaise (voir aussi Sakamoto et al., 2021; Tan et al., 2021). Le premier auteur a utilisé un logiciel d'analyse qualitative de données, Transana (Woods, 2002-2021), lui permettant de visualiser de manière synchronisée les deux vidéos et les deux transcriptions et de coder chaque tour de parole en fonction du locuteur, et, comme nous allons le décrire maintenant, de la représentation utilisée.

QUELS CHEMINS VERS LA SOLUTION ?

Afin d'analyser le déroulement de la leçon du point de vue des types des représentations possibles et des démarches de résolution possibles, nous avons réalisé une analyse *a priori* de ces représentations et de ces démarches. Autrement dit, nous avons essayé de déterminer toutes les manières possibles de représenter

---

[1] 4H.

[2] Tous les prénoms sont des pseudonymes.

[3] Problème tiré de Shimizu, S. (2014). *わくわく算数２上 [Les maths, c'est chouette, 2è année]*. Keirinkan. Toutes les traductions entre le japonais et l'anglais ou entre le japonais et le français ont été réalisées en deux étapes : une première traduction automatique à l'aide du logiciel DeepL (www.deepl.com) et une révision complète de chaque traduction par la troisième auteure.

le problème et toutes les démarches de résolution possibles, afin de pouvoir analyser celles effectivement présentes dans la leçon.

Dans la leçon observée, le problème est très rapidement illustré au tableau noir par l'enseignant sous la forme d'un schéma en barres. Toutefois, d'autres représentations apparaissent rapidement. Nous faisons donc le choix, dans cette analyse *a priori*, d'analyser d'abord les solutions possibles à l'aide du schéma en barres et ensuite d'élargir cette analyse aux autres représentations possibles.

Comment résoudre le problème ?

Le problème peut être illustré par un schéma en barres (Fig. 2). Ce type de diagramme est très couramment utilisé dans de nombreux pays, notamment à Singapour (Clivaz et Dindyal, sous presse) ou au Japon (Murata, 2008). En contexte francophone, il a été mis en lumière par l'usage important qui en est fait par la série de manuels français la *Méthode de Singapour* (voir par exemple Cuenod, 2018), et se rapproche également des schémas range-tout (voir par exemple Auquière et al., 2018). Il reste toutefois assez peu utilisé en Suisse romande ou en France. Ce type de schéma permet notamment de représenter graphiquement les relations entre les quantités présentes dans un problème. Dans le cas du problème des enfants, on peut dessiner d'abord une barre pour représenter les 24 enfants (en rose dans la Fig. 2), y accoler une barre de longueur inconnue et donc arbitraire pour représenter les enfants arrivés ensuite (en bleu dans la Fig. 2) et indiquer que la longueur totale de la barre représente le nombre total d'enfants présents (en vert dans la Fig. 2).

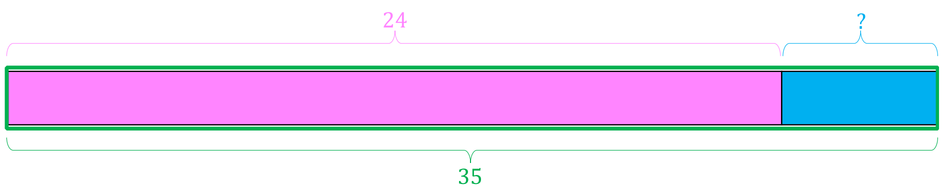


Fig. 2 : Schéma en barres

Si le tracé du schéma en barres suit l'ordre chronologique de l'histoire qu'énonce le problème, le résultat une fois dessiné est indépendant de la chronologie (Murata, 2008, p. 399-400). Cette « photo instantanée » permet deux types de raisonnement pour trouver la valeur représentée par la barre bleue.

Le premier (Fig. 3 gauche) est de se dire que la partie rose du diagramme en barres est de 24. La partie verte (totale) est de 35. Combien vaut la partie bleue ? Ce raisonnement est très proche de l'énoncé initial du problème et réintroduit son aspect chronologique. Il correspond à l'écriture arithmétique additive $24 + \ldots = 35$ ou à l'expression « 24 pour aller à 35 ».

Le second (Fig. 3 droite) est de se dire que la partie verte (totale) est de 35. Pour savoir combien vaut la partie bleue, il suffit d'enlever la partie rose de 24. Ce raisonnement introduit un nouvel aspect temporel, différent de celui du problème initial. Il correspond à l'écriture arithmétique soustractive $35 - 24 = \ldots$.

Un aspect intéressant de l'utilisation du diagramme en barres dans ces deux types de raisonnements est que chaque barre peut représenter un nombre (par exemple 24) ou une quantité d'objets (par exemple 24 enfants), ou encore permettre un aller-retour entre nombres abstraits et nombres d'objets.

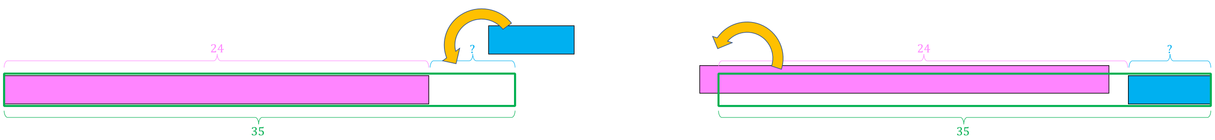
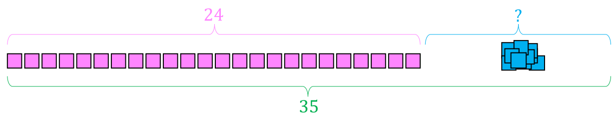
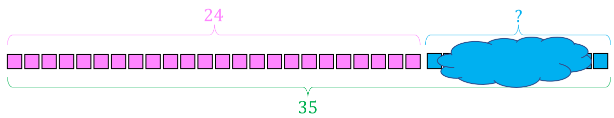


Fig. 3 : Résolutions du problème avec un schéma en barres

Comment se représenter le problème ?

Nous venons de considérer trois représentations du problème (une représentation verbale, une représentation schématique en barres et une représentation arithmétique) et deux façons de considérer ces représentations : une façon additive et une façon soustractive. En fait, les représentations possibles sont bien plus nombreuses. Nous avons tenté de les inventorier et de les classer en représentations verbales, concrètes ou semi-concrètes, schématiques, arithmétiques ou algébriques (lignes du tableau de la Fig. 4). Pour chacune de ces représentations, de la même manière que pour le schéma en barres, on peut considérer une « version additive » et une « version soustractive (colonnes du tableau de la Fig. 4).

	Version additive	**Version soustractive**
Énoncé verbal	Au début, il y avait 24 enfants qui jouaient. Puis leurs amis sont venus. Il y a maintenant 35 enfants en tout. Combien de personnes sont venues ?	Il y avait 35 enfants qui jouaient. 24 étaient arrivés plus tôt que les autres. Ils s'en vont plus tôt. Combien d'enfants jouent maintenant.
Représentation concrète (avec des élèves)	Placer 24 élèves dans la salle de classe. Faire entrer d'autres élèves dans la classe Compter tout le monde : 35 Combien d'élèves sont entrés ?	Placer 35 élèves dans la salle de classe 24 sont arrivés plus tôt. Ils s'en vont plus tôt. Comptez les élèves de la classe. Ce sont ceux qui sont arrivés plus tard.
Représentation semi-concrète (avec des jetons)	Nous avons 24 jetons sur la table. Nous ajoutons d'autres jetons. Maintenant, nous comptons 35 jetons en tout. Combien de jetons avons-nous ajoutés ?	Nous avons 35 jetons sur la table. Certains ont été ajoutés aux 24 qui étaient déjà là. Nous en enlevons 24. Ceux qui restent sur la table sont ceux qui ont été ajoutés.
Représentation semi-concrète (avec des plaquettes magnétiques carrées)	 On ajoute les plaquettes bleues en comptant : 1(25), 2(26), 3(27), 4(28), … , 10(34), 11(35)	On enlève les plaquettes roses en comptant : 1(34), 2(33), … , 23(12), 24(11) ou encore : 35– 24
Schéma en barres avec unités	 On ajoute les unités bleues en comptant : 1 (25), 2(26), 3(27), 4(28), … , 10(34), 11(35)	On enlève les unités roses en comptant : 1(34), 2(33), … , 23(12), 24(11) ou encore : 35– 24
Schéma en barres	Voir Fig. 2	
	Voir Fig. 3 gauche	Voir Fig. 3 droite

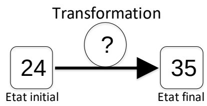
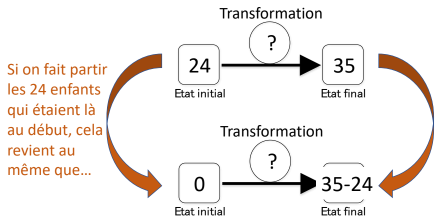
Ligne numérique (ordinale)	24, 25(1), 26(2), 27(3), 28(4), 29(5), 30(6), 31(7), 32(8), 33(9), 34(10), 35(11) ou 6 pour aller à 30, 5 pour aller à 35 ou $24 + \ldots = 35$	 $35 - 24$
Écriture arithmétique	$24 + \ldots = 35$	$35 - 24 = \ldots$
Opération en colonnes	$\begin{array}{rcc} & 2 & 4 \\ + & \ldots & \ldots \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$	$\begin{array}{rcc} & 3 & 5 \\ - & 2 & 4 \\ \hline & \ldots & \ldots \end{array}$
Écriture algébrique	$24 + x = 35$	$x = 35 - 24$
Schéma type Vergnaud		ET⁺E 
	$24 + \ldots = 35$	

Fig. 4 : Tableau des représentations possibles

Le lien entre ces diverses représentations dans leurs versions additives et soustractives nécessiterait un article en lui-même. S'ils·elles le souhaitent, nous laissons aux lectrices et lecteurs le soin de tisser quelques-uns de ces liens. De notre côté, nous allons examiner quelles représentations étaient présentes dans la leçon japonaise et par qui elles ont été utilisées. Nous nous focaliserons ensuite sur un extrait de la leçon pour voir comment deux élèves ont jonglé avec ces représentations.

LA LEÇON

La leçon a duré 53 minutes. Lors de notre analyse, nous l'avons divisée en dix segments (voir Sakamoto et al., 2021) regroupés en cinq parties. Dans la partie A (00:46 à 06:55), l'enseignant énonce le but de la leçon et le problème en disant et en écrivant au tableau noir :

> 24 enfants
>
> Des amis arrivent
>
> En tout 35 personnes

Il ajoute ensuite : « Quel est le nombre caché ? ». Dans la partie B (06:55 à 10:37) les élèves trouvent individuellement très rapidement le nombre 11 et écrivent la solution et leur méthode de résolution dans leur cahier. L'enseignant propose alors d'utiliser un diagramme en barres qu'il avait introduit lors d'une leçon précédente. Cette présentation en dialogue entre l'enseignant et les élèves à propos du diagramme et du lien avec le problème et avec les écritures arithmétiques $24 + 11 = 35$ et $35 - 24 = 11$ constitue la partie C (10:37 à 20:08) de la leçon. Les élèves présentent ensuite leurs solutions au tableau et les discutent durant la partie D (20:08 à 47:38). Cette partie D sera analysée plus en détail ci-dessous. L'enseignant conclut la leçon en allant chercher des plaquettes magnétiques pour représenter le problème et faire le geste de faire glisser 24 plaquettes pour compter le nombre de plaquettes restantes (partie E, de 47:38 à 53:03). La photographie du tableau noir (Fig. 5) permet de visualiser le tableau avec les traductions en lien avec les parties de la leçon.

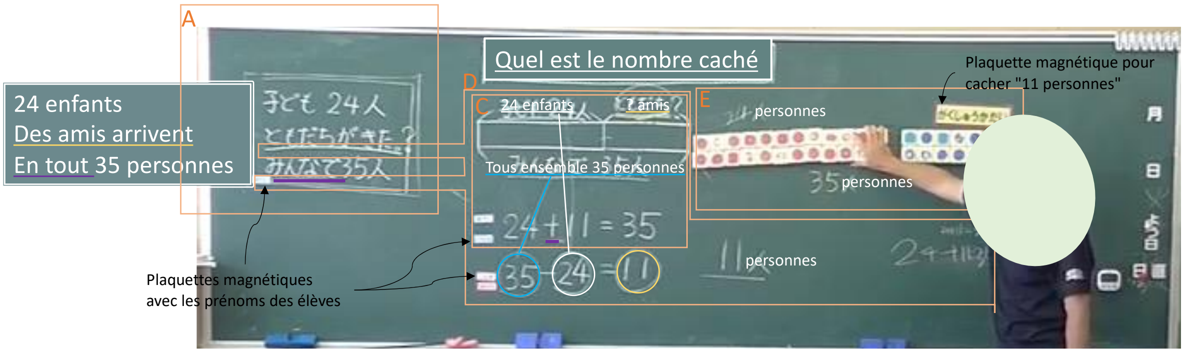


Fig. 5 : Le tableau noir à la fin de la leçon, avec les traductions en français et le lien avec les parties de la leçon

Les représentations durant la leçon

Durant l'ensemble de la leçon, la façon additive de considérer le problème a été plus utilisée que le point de vue soustractif (Fig. 6). Plusieurs types de représentations prévues par l'analyse *a priori* de la Fig. 4 ont été utilisées : représentations verbales, semi-concrètes avec des plaquettes magnétiques, en barres, arithmétiques et par des opérations en colonnes (Fig. 7). Les autres représentations n'ont pas été utilisées.

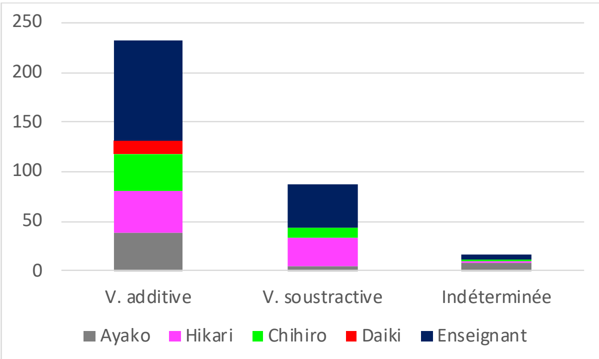


Fig. 6 : Nombre de tours de parole portant sur la version additive ou sur la version soustractive

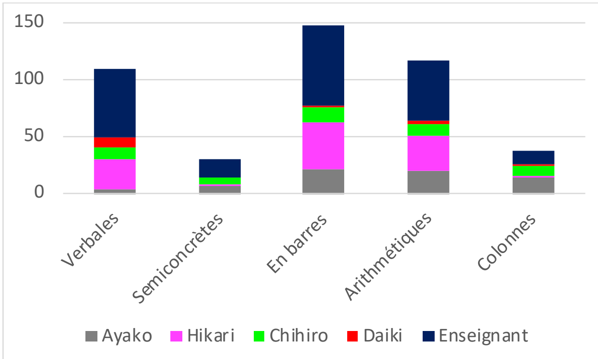


Fig. 7 : Nombre de tours de parole utilisant les diverses représentations au cours de la leçon

Comme illustré par les graphiques, certains élèves ont utilisé principalement la version additive, comme Ayako et d'autres ont utilisé les deux versions, comme Hikari. Nous verrons ci-dessous les liens entre ces deux points de vue. Pour ce qui est des représentations, il est également plus intéressant de s'intéresser aux liens entre elles. C'est toutefois difficile de le faire ici pour l'ensemble de la leçon et pour les cinq personnes. C'est la raison pour laquelle nous allons nous focaliser sur le moment de présentation et de discussion des solutions par les deux élèves ayant souhaité présenter leur solution au tableau, Ayako et Hikari.

Ayako et Hikari

Après la résolution individuelle du problème par les élèves, et après leur avoir explicitement demandé d'utiliser le diagramme en barres qu'il a dessiné en dialogue avec les élèves pour faire le lien avec les écritures arithmétiques $24 + 11 = 35$ et $35 - 24 = 11$, l'enseignant Eisaku demande qui veut présenter sa solution. Ayako se rend au tableau. Elle dit qu'elle a fait $24 + 11 = 35$ et justifie que le résultat de l'addition $24 + 11$ est bien correct (Fig. 8, ①). L'enseignant insiste en demandant de faire le lien avec le schéma en barres et Ayako explique cette fois la soustraction, en faisant une soustraction en colonnes par oral, tout en montrant alternativement le schéma en barres et l'écriture arithmétique ②. Eisaku insiste, mais Ayako reste sur la justification que les calculs sont corrects ③. Tout au long de son passage au tableau, Ayako montre qu'elle a bien compris le lien entre les représentations du problème. Elle ne parvient par contre pas à utiliser ces représentations pour faire le lien entre la version additive et la version soustractive, malgré l'insistance de Eisaku.

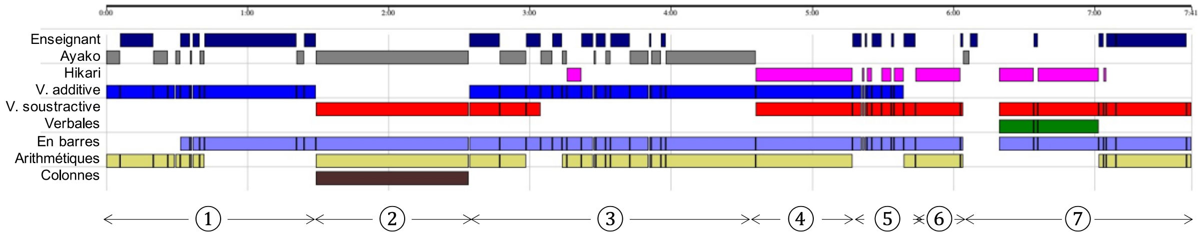


Fig. 8 : Codage du moment d'explication des solutions de Ayako et Hikari

Hikari l'interrompt alors et se rend au tableau.

④	1	Hikari	J'ai quelque chose à dire. Parce que, euh, mais... 24 plus 11 égal 35... 35 moins 24 égal 11... (montre les nombres respectifs des deux écritures arithmétiques voir Fig. 5)
⑤	2	Eisaku	Où est le 24 ? D'où à où ?
	3	Hikari	24 est d'ici à ici.
	4	Eisaku	Et ?
	5	Hikari	35 est d'ici à ici. (montre à chaque fois le rectangle concerné)
	6	Eisaku	Donc 35 est d'ici à ici ?
	7	Hikari	11 est d'ici à ici.
	8	Eisaku	Et ?
	9	Hikari	Et alors ?
⑥	10	Eisaku	Donc, cette soustraction, elle vient d'où ?
	11	Hikari	Euh, ça c'est 35, j'enlève 24 et il reste 11, donc 11 enfants.
	12	Eisaku	Comment ça ?
⑦	13	Ayako	(Applaudissements)
	14	Eisaku	Chihiro. Tu comprends ?
	15	Daiki	Je ne comprends pas.
	16	Hikari	Regarde encore. D'ici à là, il y a 35 personnes, non ? Oh, ça fait 35 bandes, non ?
	17	Eisaku	(Rires) Ce n'est pas une bande, 35 personnes.
	18	Hikari	Oh, c'est 35 personnes, non ? Et puis tu le tires, 24, et ça fait 11, c'est ça ? Donc, la barre qui reste est de 11, donc il y a 11 personnes.
	19	Eisaku	Vous voyez du bleu ? (entoure en bleu le 35 dans l'écriture algébrique et sur le schéma, voir Fig. 5).
	20	Hikari	Bleu ? Je vois.
	21	Eisaku	Qu'en penses-tu ? Est-ce que ça a un sens, cette explication. Tu n'es toujours pas convaincu ?
	22	Chihiro	Je suis convaincu.

Hikari a bien compris le lien entre la version additive et la version soustractive. C'est d'ailleurs la seule des quatre élèves qui utilise les deux points de vue (voir Fig. 6). Elle commence donc par expliciter ce lien sur l'écriture arithmétique (1). L'enseignant Eisaku lui demande simplement « D'où à où ? » (2). Hikari va alors montrer à deux reprises (lignes 11 et 18) sur le schéma en barres, le fait qu'on peut enlever la partie 24 pour trouver la partie 11. Cette explication est permise par le fait que le schéma en barres permet l'abolition, puis le renversement de la chronologie comme nous l'avons vu plus haut et aux Fig. 2 et Fig. 3, même si Hikari utilise le vocabulaire du problème « personnes » et non celui du schéma. Elle fait ainsi le lien entre les représentations arithmétiques, en barres et verbales du problème, ce qui est favorisé par les écritures « 24 enfants », « ? amis » et « 35 personnes » au tableau noir (voir la Fig. 5).

Cette explication semble convaincre les autres élèves. Notons toutefois que l'enseignant se rendra compte que le mouvement consistant à enlever la partie 24 n'est pas suffisamment explicite. Il ira donc chercher des plaquettes magnétiques (représentation semi-concrète avec des plaquettes magnétiques carrées, voir Fig. 4) pour faire le geste de faire glisser les 24 plaquettes comme le montre la photographie de la Fig. 5.

Ce moment de présentation des solutions illustre bien ce que les auteurs de cet article ont observé à de multiples reprises dans des leçons de mathématiques au Japon et qui est relevé par de nombreux auteurs (voir par exemple Clivaz & Miyakawa, 2020; Inoue, 2011; Takahashi, 2008) : c'est durant le moment de présentation et de discussion des solutions que se construisent principalement les connaissances mathématiques. Dans les leçons de mathématiques japonaises, ce moment de mise en commun, appelé *neriage* (voir Clivaz & Takahashi, 2020), tire profit des liens entre plusieurs méthodes de résolution et plusieurs représentations pour construire une compréhension profonde des concepts mathématiques. Si, dans ces moments surtout, l'essence des mathématiques se trouve dans les liens entre concepts ou entre méthodes de résolution, il faut pouvoir visualiser ces liens. Cela n'est possible que grâce à l'affichage de multiples représentations, généralement au tableau noir, comme illustré par la Fig. 5 et comme étudié plus en détail par Tan et al. (2021).

Conclusion

L'étude de l'usage de représentations graphiques lors de la résolution de problèmes a été beaucoup étudiée. C'est en particulier le cas de l'utilisation de modèles en barres récurrente dans la scolarité de plusieurs pays asiatiques, particulièrement Singapour et le Japon (Clivaz & Dindyal, sous presse; Murata, 2008). Notre recherche, dont cet article montre un extrait, indique que l'étude de l'utilisation de ces représentations en lien étroit avec l'enregistrement vidéo et la transcription de la leçon est une piste prometteuse du point de vue de la recherche, mais aussi du point de vue de la diffusion aux enseignant·e·s. Il nous semble particulièrement intéressant d'examiner la façon dont les représentations graphiques sont utilisées au tableau dans les moments de mise en commun et les effets de ces moments sur l'apprentissage mathématique des élèves. On pourrait notamment imaginer que des extraits de manuels, des reproductions de tableaux noirs et des extraits de transcriptions de leçons servent de support à des discussions avec des équipes d'enseignant·e·s d'établissements scolaires. Comme développée par l'université de Nagoya, cette pratique, idéalement mais pas obligatoirement basée sur les leçons données dans l'établissement, pourrait être un développement fructueux des processus de lesson study.

Bibliographie

Auquière, A., Demonty, I. & Fagnant, A. (2018). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 23*, 41-68. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST18017/IST18017.pdf

Batteau, V. (2019). Activité de mesure de la longueur d'un couloir dans une école primaire japonaise. *RMé, 232*, 4-14. http://www.revue-mathematiques.ch/consultation/numero-229/

Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math-Ecole, 224*, 23-26. http://www.revue-mathematiques.ch/files/2614/6288/8786/ME224_Clivaz.pdf

Clivaz, S. & Dindyal, J. (sous presse). Représentations graphiques et résolution de problèmes: le cas de Singapour. *Grand N, 108*, 5-25.

Clivaz, S. & Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics, 105*(1), 53-70. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09980-1

Clivaz, S. & Takahashi, A. (2020). Lesson Study, enseignement par la résolution de problèmes et neriage : réflexions autour de l'observation d'une leçon de mathématiques. *RMé, 233*, 6-15. https://www.revue-mathematiques.ch/files/8415/9195/2570/RMe-233-Clivaz.pdf

Cuenod, L. (2018). Maths - La méthode de Singapour. *Le Point, Hors-série.* https://www.lepoint.fr/dossiers/sciences/maths-methode-singapour/

Inoue, N. (2011). Zen and the art of neriage: Facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 5-23. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10857-010-9150-z

Matoba, M. (2017). Building academic-oriented lesson study. *東海学園大学教育研究紀要 [Notes de recherche pédagogique de l'Université Tokai Gakuen], 3*, 120-134. http://repository.tokaigakuen-u.ac.jp/dspace/bitstream/11334/1492/1/spkiyo_003_12.pdf

Murata, A. (2008). Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 374-406. https://doi.org/10.1080/10986060802291642

Sakamoto, M., Tan, S. & Clivaz, S. (2021). The complexity of teachers' work in the classroom: Model of the teacher's speaking, writing, listening, and movement. Manuscrit en préparation.

Shimizu, S. (2014). *わくわく算数２上 [Les maths, c'est chouette, 2è année]*. Keirinkan.

Takahashi, A. (2008). Beyond Show and Tell: Neriage for Teaching through Problem-Solving - Ideas from Japanese Problem-Solving Approaches for Teaching Mathematics. Dans M. Santos-Trigo et Y. Shimizu (dir.), *ICME 11, Topic Study Group 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 145-157).

Tan, S., Clivaz, S. & Sakamoto, M. (2021). Representing multiple representations: A bansho analysis. Manuscrit en préparation.

Woods, D. K. (2002-2021). Transana (version 4.00-Professional-Mac). http://www.transana.org/