

Plan de leçon¹: Introduction aux fractions

Membres de l'équipe

Benjamin Arnold, Jérôme Loutan, Marianne Vallat, Marie-Noëlle Kaempf, Olivier Lorenzi, Pierre Fumeaux, (CAS InnoMaths 21-23), Stéphane Clivaz (HEP Vaud)

Date de la leçon

24.11.2021

Enseignant·e·s

Jérôme Loutan

Classe

9VG N1 + N2

1. Titre de la leçon

Introduction aux fractions - découverte par la voie de l'expérimentation

2. Thème de recherche

Objectifs à long terme pour les élèves et moyens de les atteindre

S'approprier la notion de fraction en utilisant du matériel que les élèves peuvent manipuler.
Modifier la perception de la fraction auprès de nos élèves, diminuer la crainte d'utiliser les fractions.
Améliorer les compétences arithmétiques des élèves en abordant le calcul rationnel.

3. Contexte et recherches sur le contenu

Pourquoi nous avons choisi de traiter ce sujet, en quoi il est délicat pour les élèves et/ou pour les enseignants

Les ressources que nous avons étudiées et ce que nous avons appris à propos du contenu et les manières de penser des élèves

La notion de fraction est abordée longuement sur les trois ans du programme du secondaire I. Pourtant, elle reste souvent mal acquise et semble très abstraite pour les élèves.
Les élèves ont tendance à méconnaître le sens propre de la notion de fraction, se basant quasi exclusivement sur quelques représentations communes.
Notre réflexion a largement porté sur la représentation du nombre fractionnaire. Nous avons

¹Adaptation du plan de leçon élaboré par le Lesson Study Group du Mills College, Oakland, CA (USA):
<https://lessonresearch.net/plan-step/take-stock/>

en particulier remis en question l'utilisation conventionnelle du disque (modèle de la pizza) au profit de l'utilisation de la bande horizontale telle que proposée par Takahashi (2021, voir les références).

Nous nous sommes également basés sur un document de l'IREM-Pays de la Loire (Brachet et al., 2020, voir références) qui propose la représentation de la fraction unitaire comme nouvelle unité de travail. Le document IREM, comme Takahashi d'ailleurs, proposent d'emblée des fractions supérieures à 1 afin notamment de confronter directement les élèves à un obstacle cognitif intéressant.

Enfin, nous faisons l'hypothèse que la représentation sous forme de bande offre un passage plus aisé vers la droite numérique, donc à l'équivalence entre le nombre noté comme fraction et le nombre en code décimal.

4. Liens avec le plan d'études (PER)

Connaissances préalables	Éléments du plan d'études relatifs à cette séquence et plus particulièrement à la leçon de recherche	Connaissances futures
Représentation de fractions en 7 - 8 H Comparaison, classement de fractions unitaires ou de même dénominateur Reconnaissance d'un nombre sous diverses écritures et établissement de quelques égalités (la moitié = $\frac{1}{2}$ = 0,5 = 5 dixièmes = $\frac{5}{10}$...) Production d'un nombre plus petit ou plus grand qu'un nombre donné d'une unité	Expression de la quantité correspondant à la moitié, au tiers, au quart, aux trois quarts, au dixième,... d'une quantité donnée (7H-8H) Utilisation de procédures de calcul réfléchi ou de calcul mental avec des nombres rationnels positifs sous forme décimale ou fractionnaire Utilisation des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace avec des nombres rationnels positifs sous forme décimale ou fractionnaire Capacités transversales : Collaboration et communications	Simplification et amplification de fractions Expression d'un nombre sous forme fractionnaire ou décimale Addition et soustraction de fractions Multiplication et division de fractions

5. Plan de la séquence

La leçon d'introduction est basée sur les séances 1 et 2 du document IREM.

Une suite logique serait de poursuivre la séquence proposée par le document IREM. La séquence totale dure entre 6 et 7 heures.

En voici le résumé (document IREM) :

- Séance 0 (lors d'une séquence précédente sur les grandeurs) : Mesure d'une longueur en reportant une unité non conventionnelle.
- Séance 1 : Insuffisance des nombres entiers (1h)
 - o Insuffisance des nombres entiers (30min)
 - o Synthèse sur la signification des mots "moitié", "demi", "quart" (10min)
 - o Codage basé sur les fractions sous forme de pliages (20min)
- Séance 2 : Introduction de l'écriture fractionnaire (1h)
 - o Rappels ("quart", "demi", "huitième")
 - o Associer un message à une bande
 - o Introduction de l'écriture fractionnaire
 - o Appropriation de l'écriture fractionnaire
 - o Trace écrite résumant les 2 premières séances
- Séance 3 : Codage et décodage des fractions (1h)
 - o Rappels et entraînement en frontal
 - o Entraînement individuel sur papier
 - o Trace écrite résumant la séance
- Séance 4 : Décomposition de fractions (1h)
 - o Premières recherches d'équivalence
 - o Mise en commun et entraînement individuel
- Séance 5 : Découverte et utilisation d'autres fractions (45min)
 - o Lien vers de nouveaux contextes (pizza, plaque de chocolat, ..)
 - o Entraînement individuel ou en groupe
 - o Bilan résumant les difficultés et les acquis
- Séance 6 : Placer des fractions sur une droite graduée (45 min)
 - o Comprendre les conventions de la droite graduée
 - o Placer des fractions sur une droite graduée
 - o Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs
- Séance 7 : Utiliser des fractions dans des problèmes (45min)
 - o Présentation d'un exercice type "problème"
 - o Résolutions de problèmes en groupe puis entraînement individuel
 - o Résumé et bilan de la séance

6. Objectifs de la leçon de recherche

Pour les élèves :

- Manipulation de fractions comme partie d'un autre objet, sans mesure, sans code décimal.
- Utilisation de fractions supérieures à 1.

Pour le groupe LS :

- Est-ce que l'utilisation des fractions émerge sans l'explicitier au départ ?
- Quelle utilisation de leurs connaissances préalables ?

- Plaisir de faire des maths autrement ? Émulation ?
- Observer des élèves, observer une leçon.

7. Plan de la leçon de recherche

Résumé du déroulement de la leçon

1. Lancement de la tâche
Chaque groupe d'élèves reçoit une bande unité et une bande de papier de longueur inconnue. On leur indique qu'ils doivent rédiger un message permettant à un autre groupe de retrouver la bande inconnue mesurée à partir de la bande unité.
2. Rédaction du message
Chaque groupe rédige son message.
3. Échange des messages
Les bandes inconnues de chaque groupe sont cachées. Les messages sont ramassés et redistribués.
4. Lecture des messages
Une feuille contenant l'ensemble des bandes inconnues nommées par une lettre est à disposition. Chaque groupe doit retrouver à quelle bande correspond le message qu'il a reçu.
5. Retour à l'expéditeur
Chaque message, avec la désignation de la bande inconnue, est retourné au groupe expéditeur qui vérifie qu'il s'agit bien de la bande décrite.
6. Mise en commun

Matériel

- Bandes de papier découpées, version A3 pour le travail de groupes (voir annexe)
- Mêmes bandes de papier découpées en carton ondulé, en version agrandie pour afficher au tableau : L'unité mesure 40 cm, la plus grande bande mesure 1 m
 - Bandes brunes/colorées pour l'unité
 - Couleur carton naturel/blanc : 2 de chaque B, ...
 - Lettres : les mettre sur la face avant
 - Bandes en réserve
 - Carton souple
 - Aimants collés à l'arrière des bandes pour fixer les bandes au tableau noir
 - Feuilles rédaction message (voir annexe)

Temps	Tâches et activités, points clés pour l'apprentissage, possibles réponses des élèves	Support et relances de l'enseignant-e	Éléments à observer/observés
5'	Accueil		
5'	1. Lancement de la tâche ● Matériel ○ Version A3 pour le travail de groupes : ■ 1 bande par groupe parmi les 3 bandes B; E et F ■ 1 bande unité par groupe ■ Bandes unités en réserve si demandées ○ Le matériel permettant de proposer des cas plus ou moins faciles à traiter, nous saisissons l'occasion de différencier la tâche. Les binômes sont composés de membres qui font preuve d'aisance semblable. Cela se trouve être aussi ainsi que les élèves se regroupent dans cette classe quand ils le font par affinité. ■ Pour les duos rencontrant le plus de difficultés, distribuer la bande B ■ La bande F est la plus difficile à aborder ● Demander de tout ranger, sauf un crayon, pas de règle graduée, ne pas toucher le matériel ● Distribuer d'abord tout le matériel ● Consigne IREM projetée (vidéoprojecteur) et lue par l'enseignant. Insister sur : ○ « Message en mots qui décrit le mieux votre bande » ○ « Décrire la bande blanche à	<u>1ère consigne projetée via le vidéoprojecteur :</u> <i>Vous allez utiliser la bande unité pour mesurer votre bande blanche.</i> <i>Vous pouvez plier la bande unité si vous le souhaitez.</i> <i>Une fois que vous êtes d'accord entre vous, vous écrivez un message qui doit permettre à ceux qui le recevront d'identifier votre bande blanche parmi d'autres.</i> <i>Chaque binôme prend connaissance du message de l'autre binôme et fait une proposition de bande à partir des explications données ou explique pourquoi il n'a pas pu trouver la bande décrite (sur la partie grise).</i>	Les E sont-ils surpris ? Réceptifs ? Les E ont-ils des questions ? Les E prennent-ils le temps de bien écouter/comprendre les consignes ou commencent-ils directement l'activité ?

	l'aide de la bande brune » • Ne pas montrer la feuille avec toutes les bandes, mais en parler ◦ « Vous devrez retrouver la bande parmi d'autres »		
10'	2. Rédaction du message • Les élèves rédigent le message par deux.	Si nécessaire, indiquer que : • ils peuvent plier, écrire sur les bandes • ils ne peuvent pas découper • ils peuvent avoir d'autres bandes brunes Relances • éviter le décrochage (encourager les duos en difficulté : « écrivez un message avec vos mots pour que vos camarades puissent retrouver la bande ») • duos rapides : deuxième message (bande C $1+5/8$ ou D $1+3/8$).	Observer comment les élèves entrent dans la tâche, les procédures des élèves, les interactions dans les duos. Le mot "fraction" ou les écritures fractionnaires (lesquelles) sont-ils utilisés par les élèves ?
2'	3. Échange des messages • Cacher la bande sous la table. • Éviter qu'un duo ne reçoive un message correspondant à la même bande que celle qu'ils ont dû décrire. • Lors de la redistribution, faire en sorte que les binômes les moins à l'aise reçoivent un message dont la rédaction est claire. Au contraire, confronter les binômes plus rapides et à l'aise à un message plus confus.		
5'	4. Lecture des messages • Projeter la deuxième consigne	<u>2ème consigne projetée via le projecteur vidéo :</u>	Comment les E procèdent pour

	• Insister sur le fait qu'ils doivent écrire et commenter la clarté de la description reçue.	<i>Chaque binôme prend connaissance du message de l'autre binôme.</i> <i>Il fait une proposition de bande blanche à partir des explications données ou explique pourquoi il n'a pas pu trouver la bande blanche décrite (sur la partie grise).</i> Selon la gestion de la classe : • Bandes A, C, D à coder à partir de la feuille A3 pour les groupes qui auraient terminé • En support d'un autre groupe : on photographie le message avec un iPad	retrouver la bande. Quel effet du message ? Quel lien entre leur message et celui qu'ils ont reçu ? Les E voient-ils qu'il y a suffisamment ou au contraire pas assez d'informations dans le message ?
2'	5. Retour à l'expéditeur • L'enseignant gère la transmission des messages • Lire le retour • Les élèves valident que c'est la bonne bande	Peu de temps sur ce moment. Passer rapidement à la mise en commun (MEC).	
10'	6. Mise en commun • Version agrandie sur papier cartonné (annexe) pour afficher au tableau : L'unité mesure 40 cm, la plus grande bande mesure 1m • Qui a un message qui n'a pas été compris/ qui n'a pas permis de trouver la bande ? Qui a un message qui a été compris ? • Demander de lire les messages • Insister sur les mots moitiés, quarts • Ce qui ne réussit pas	Préparer au préalable le matériel agrandi en le fixant à l'aide d'aimants ou par un autre moyen de fixation sur une partie cachée du TN (voir case "Éventuelle planification du tableau noir"). Étape très importante de la leçon. Si possible, faire cette étape "à chaud" si l'on peut disposer de deux	Observer la réaction, les apprentissages des élèves face à cette MEC.

	○ Cas de non réussite ○ Pourquoi ? ● Ce qui réussit ○ Cas de réussite ○ Pourquoi ? ● Faire noter : Moitié, quart, huitième ● Insister sur le fait qu'une règle n'est pas nécessaire, mais qu'on mesure à partir de quelque chose de commun : une unité	périodes de suite.	
	Quelques jours après : demander un bilan aux élèves au début de la semaine suivante	Bilan par écrit afin de conserver une trace dans son cahier et qui peut servir d'amorce pour la suite de cette introduction aux fractions.	

8. Éléments observés

- La succession des étapes est essentielle. Il est nécessaire de l'expliquer aux élèves.
- Certains élèves veulent utiliser des longueurs en centimètres. Il convient de préciser que tout élément de mesure est interdit (pas de règle disponible) car on veut mesurer à partir de la bande unité.
- Il est difficile de rédiger un message "clair". Il convient de préciser que le message doit être clair et compris par une personne "novice". Un exercice préalable de vocabulaire peut être pertinent.
- Nous avons observé une confusion de termes : "plier en trois" ou "plier trois fois" peut dire pour certains plier à trois reprises en deux (donc en huitième) ou, au contraire, en tiers (plus difficile). Cette confusion peut être exploitée dans la mise en commun et la discussion, car elle peut ouvrir une réflexion sur le sens des fractions.

9. Planification du tableau

Les consignes (voir le plan de leçon) sont projetées via un projecteur vidéo. Elles peuvent aussi être écrites à l'avance (et cachées) sur un pan du tableau.

Préparer également une partie cachée du tableau en plaçant les différentes bandes proposées ainsi que la bande unité (version agrandie) en vue de la mise en commun.

Prévoir un dernier pan de tableau pour le texte synthétisant les connaissances et/ou autres découvertes ayant émergées lors de la leçon.

10. Réflexions à l'issue du cycle

Ce que nous avons appris

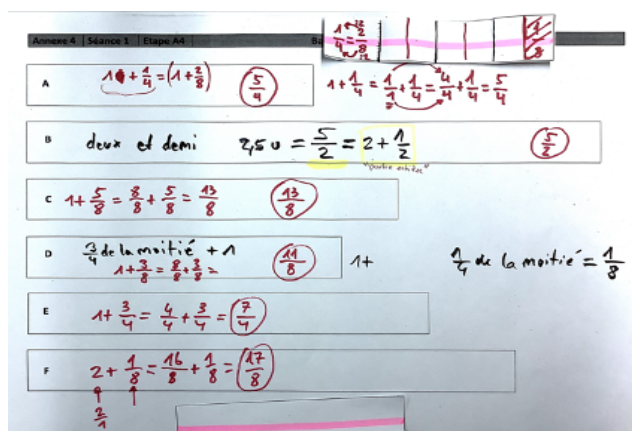
- Il n'est pas facile pour les élèves d'entrer dans une tâche de recherche, en introduction de thème, sans avoir un objectif de type "Qu'est-ce que je dois apprendre ?" clairement formulé.
- Une partie des élèves se sont amusés lors de cette activité alors que d'autres se sont ennuyés.
- Le moment de mise en commun est très important, même indispensable pour donner du sens à une activité de recherche. Il est primordial de lui octroyer suffisamment de temps afin de faire émerger des notions sous-jacentes acquises lors de cette leçon. Il est donc souhaitable de disposer de deux périodes à la suite pour effectuer un travail de qualité.
- Le fractionnement d'un objet (la bande à décrire) à l'aide d'un autre (la bande unité) a été expérimenté et réussi par la majorité, et ce sans utiliser d'outil de mesure.
- Les élèves ont visualisé des fractions supérieures à 1. De même, ils ont acquis (à l'issue de la mise en commun) l'utilisation des fractions de base $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$.
- Il est nécessaire d'explicitier des termes importants avec les élèves (par ex. pliage en trois).

11. Prolongements testés dans une classe de 10H

Utilisation de cette activité en début de thème "nombres rationnels" en 10H.

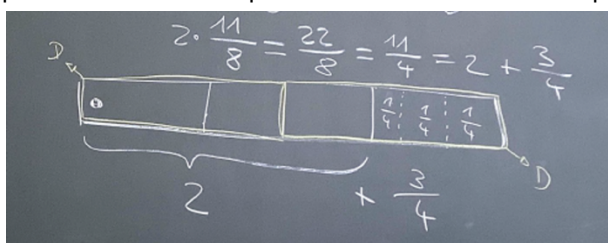
Objectif : rappel du programme de 9H. En 9H, l'introduction a été différente, basée sur des schémas circulaires.

1. Activité répétée telle que pour la classe de 9H dans la première partie du document. La mise en commun a permis un rappel sur le concept de fraction irréductible et de différentes écritures pour chaque fraction. L'écriture anglo-saxonne (partie entière) a été institutionnalisée. C'est une nouveauté pour les élèves mais c'est celle qu'ils ont utilisée naturellement dans l'activité. L'image ci-dessous présente ce qui a été mis en commun. Chaque groupe conserve cette feuille pour la suite. Ce fut l'occasion de reparler d'amplification.



2. En prolongement et pour travailler l'addition, une bande mystère (préalablement collée sur le bureau des élèves) doit être mesurée par combinaison des bandes A à F. Les élèves n'avaient plus l'unité à leur disposition. Chaque groupe a donc découpé ses bandes A à F. La bande mystère (de longueur $4u + \frac{3}{4}$, inconnue des élèves) est obtenue par l'addition des bandes E, D et C ou F, A et D. Ces deux solutions ont permis de travailler l'addition (rappel des règles).

3. Les élèves n'avaient maintenant plus que la bande D. Ils devaient mesurer une autre bande mystère (équivalente à 2D, donc $2u + \frac{3}{4}$) et donner la longueur en unités $\rightarrow 2u + \frac{3}{4}$. Cette approche a permis d'introduire la multiplication d'une fraction par un entier (visuellement, on voit que 2 fois $\frac{11}{8}$ donne 22 huitièmes, ce n'est pas le meilleur exemple, mais des choix judicieux de bandes peuvent servir de représentation lors de la multiplication)



Prolongements non testés :

Il serait aussi intéressant de faire faire mesurer des objets en classe (le bureau, l'armoire, ...). Pour cela, les groupes pourraient "fabriquer" une grande bande par collage des bandes A à F. On peut imaginer remplacer le collage par une ficelle rigide (non extensible) ou par une liste de bois pour gagner du temps. Il est également possible de travailler l'amplification en augmentant le nombre de pliages (préparer des seizièmes ?).

12. Références

- Brachet, L., Hersant, M., & Lucas, F. (2020). *Une séquence sur l'introduction des fractions au CM1*. IREM des Pays de la Loire. <https://irem.univ-nantes.fr/wp-content/uploads/2020/06/2020-Une-sequence-sur-l%E2%80%99introduction-des-fractions-au-CM1.pdf>
- Takahashi, A. (2021). TTP Unit: Introducing fractions. Dans A. Takahashi, *Teaching Mathematics Through Problem-Solving, A Pedagogical Approach from Japan* (p. 104-117). Routledge.

13. Annexes

13.1 Bandes de papier (Tirées de la séquence IREM : Brachet et al., 2020, pp. 38-39, 41)

Attention: Ces bandes sont reproduites ici pour favoriser la compréhension de la séquence. Pour une éventuelle impression, utiliser le document original et suivre les indications disponibles ici:

<https://irem.univ-nantes.fr/wp-content/uploads/2020/06/2020-Une-se%CC%81quence-sur-l%E2%80%99introduction-des-fractions-au-CM1.pdf>

Annexe 1	Séance 1	Etape A3	Bandes unité (à imprimer sur une feuille colorée)
----------	----------	----------	---

Annexe 2	Séance 1	Etape A3	Bandes de papier à distribuer aux élèves
----------	----------	----------	--

Annexe 4	Séance 1	Etape A4	Bandes de papier repérées par les lettres
----------	----------	----------	---

A

B

C

D

E

F

Feuilles de rédaction des messages (Brachet et al., 2020, p. 40)

Annexe 3	Séance 1	Etape A3	Fiche navette pour les échanges de messages
-----------------	-----------------	-----------------	--

Prénoms du binôme :

Message pour trouver notre bande :

Message reçu par :

Réponse :

Nous avons trouvé votre bande : c'est la bandecar.....

.....

.....

Nous n'avons pas trouvé votre bande car

.....

.....